

BS projekt i matematik - Fraktaler og IFS

Daniel Pröstur Sigurdsson

27. oktober 2009

Abstract:

Vi definerer mængden af kompakte delmængder af et fuldstændigt metrisk rum X , betegnet $\mathcal{H}(X)$, og viser at den er et fuldstændigt metrisk rum med passende metrik (Hausdorff metrikken). Vi definerer et "Itereret Funktionssystem" (IFS) af kontraktive afbildninger på X , og viser at de inducerer tilsvarende kontraktive afbildninger på $\mathcal{H}(X)$. Vi definerer så en funktion $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$, hvor $W(A)$ er foreningen af billederne af A under afbildningene der tilhører IFS'et og taler om fraktaler som værende grænsen $W^{on}(A)$ når $n \rightarrow \infty$. Vi viser at denne grænse er entydig og uafhængig af A . Derefter definerer vi den "fraktale dimension" af et fraktal, giver to måder på at vurdere den og viser at den er invariant under metrisk ækvivalens. Til sidst giver vi eksempler for at illustrere idéerne.

We define the set of compact subsets of a complete metric space X , denoted $\mathcal{H}(X)$, and show that it is a complete metric space with an appropriate metric (the Hausdorff metric). We define an "Iterated Function System" (IFS) of contractive maps on X and show that they induce corresponding contractive maps on $\mathcal{H}(X)$. We define a function $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$, where $W(A)$ is the union of the images of A under the maps belonging to the IFS and we speak of fractals as being the limit $W^{on}(A)$ as $n \rightarrow \infty$. We show that this limit is unique and independent of A . Then we define the "fractal dimension" of a fractal, give two methods for evaluating it and show that it is invariant under a metric equivalence. At last we give examples for illustrating these ideas.

1 Mængden $\mathcal{H}$ og dens fuldstændighed

Vi starter med nogle præliminære definitioner og bemærkninger om metriske rum.

Definition 1. Et metrisk rum (M, d) er et mængde M sammen med en *afstandsfunktion* $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ som opfylder, for vilkårlige $x, y, z \in M$:

1. $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y,$

$$2. \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$3. \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

□

Vi antager at læseren kender begreberne *lukket mængde*, *afslutning*, *åben mængde*, *randpunkt*, *indre punkt*, *kontinuert funktion*, *homeomorfi*, *begrænset mængde*, *konvergent følge* og *Cauchy følge*.

Definition 2. Et metrisk rum (X, d) er fuldstændigt hvis alle Cauchy følger $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ i X har en grænse $x \in X$. □

Vi bruger notationen $B(a, r)$ for en *åben kugle med centrum i a og radius r* :

$$B(a, r) = \{x \in M : d(a, x) < r\},$$

og $\overline{B}(a, r)$ for den lukkede version:

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in M : d(a, x) \leq r\}.$$

Definition 3. En delmængde S af et metrisk rum (X, d) er *totalt bægrænset* hvis der for hvert $\epsilon > 0$ der findes en endeligt mængde $E = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in S$ sådan at for hvert $x \in S$, $d(x, y) \leq \epsilon$ for et $y \in E$, eller ækvivalent:

$$S \subset \bigcup_{y \in E} B(y, \epsilon).$$

Mængden E kaldes et ϵ -net. □

Vi er specielt interesseret i kompakte mængder:

Definition 4. En delmængde K af et metrisk rum M siges at være *kompakt* hvis enhver punktfølge i K har en konvergent delfølge. □

Vi bruger også specielt den følgende klassificering af kompakte mængder:

Sætning 1. En delmængde af et fuldstændigt metrisk rum er kompakt hvis og kun hvis den er lukket og totalt begrænset. □

Sætning 2. En delmængde af det metriske rum $(\mathbb{R}, \text{Euklidisk})$ er kompakt hvis og kun hvis den er lukket og begrænset. □

Disse resultater er velkendte og findes i en introduktion til metriske rum, som f.eks. "Metriske rum", af Christian Berg. På den måde er det nemt at forestille sig kompakte delmængder af et givet fuldstændigt metrisk rum. I dette projekt taler vi om fraktaler som værende visse mængder af denne type. Derfor giver vi følgende definition:

Definition 5. Lad (X, d) være et fuldstændigt metrisk rum. Med $\mathcal{H}(X)$ betegner vi mængden af ikke-tomme kompakte delmængder af X . $\square$

Vi kan definere en metrik på $\mathcal{H}(X)$, men det er ikke helt trivielt. Først giver vi følgende definition:

Definition 6. Lad (X, d) være et fuldstændigt metrisk rum, $x \in X$ og $B \in \mathcal{H}(X)$. Sæt

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) : y \in B\}.$$

Funktionen d kaldes *afstanden fra punkten x til mængden B* . $\square$

Det minimum vi bruger i definitionen findes, da B er kompakt. Vi bemærker at for $x \in B$ er $d(x, B) = 0$, da vi kan sætte $y = x$ og få $d(y, y) = 0$ når vi tager minimum over hele B . Vi kan nu bruge Definition 6 for at lave en slags afstand fra en mængde $A \in \mathcal{H}(X)$ til en mængde $B \in \mathcal{H}(X)$.

Definition 7. Lad (X, d) være et fuldstændigt metrisk rum og lad $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Definer

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\}.$$

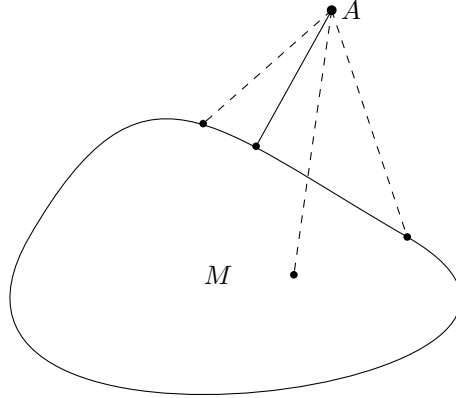
Funktionen $d(A, B)$ kaldes *afstanden fra mængden $A \in \mathcal{H}(X)$ til mængden $B \in \mathcal{H}(X)$* . $\square$

Læg mærke til at funktionen d fra Definition 7 *ikke* er en egentlig afstandsfunktion på rummet $\mathcal{H}(X)$. Den er f.eks. asymmetrisk, i den forstand at generelt er $d(A, B) \neq d(B, A)$. Det ses specielt at hvis $A \subset B$ er

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\} = 0,$$

da $x \in B$ for alle $x \in A$. Vi vil gerne bruge en definition som måler *forskellen* mellem to mængder, så f.eks. at denne forskel kun er 0 når $A = B$. Faktisk kan vi definere en funktion som opfylder alle betingelserne i Definition 1, så at $\mathcal{H}(X)$ bliver et metrisk rum:

Figur 1: Linjerne viser nogle mulige kandidater for afstanden d , fra punkten A til mængden M . Når vi tager minimum af dem alle sammen får vi den sande afstand

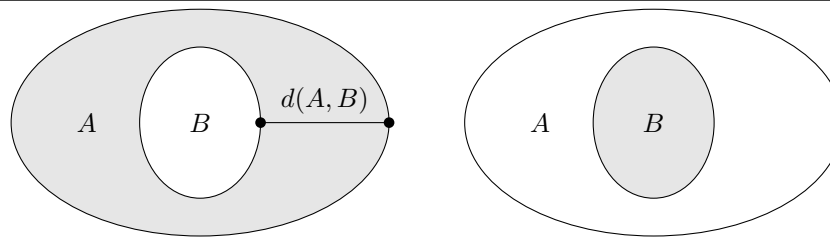


Definition 8. Lad (X, d) være et metrisk rum og lad $A, B \in \mathcal{H}(X)$. *Hausdorff-afstanden* mellem A og B er defineret ved

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A),$$

hvor $x \vee y$ betegner maksimum af tallene x og y . □

Vi betegner også h med $h(d)$ når vi vil være eksplicit om hvilken afstandsfunktion vi bruger for elementer i X .



Figur 2: Her er $B \subset A$. For hvert $x \in B$ er også $x \in A$ så afstanden $d(B, A)$ bliver 0. Til gengæld kan man godt finde $x \in A$ sådan at $x \notin B$. Tager vi maksimum af afstanden af disse punkter fra B får vi $d(A, B)$. Da $d(B, A) = 0$ er $h(A, B) = d(A, B)$.

Proposition 1. Lad (X, d) være et fuldstændigt metrisk rum. Så er $(\mathcal{H}(X), h(d))$ et metrisk rum.

Bevis: Lad A, B og C være vilkårlige elementer i $\mathcal{H}(X)$. Vi viser betingelserne i Definition 1 hver for sig:

1. Da A og B er kompakte findes $a \in A$ og $b \in B$ sådan at $h(A, B) = d(a, b)$ og det følger at $h(A, B) \geq 0$. Antag at $A \neq B$. Så findes der enten et $x \in A$ med $x \notin B$ eller $x \in B$ med $x \notin A$. Antag det første. Da X er fuldstændigt og B kompakt, må B være lukket, så det følger at $d(x, B) > 0$ (hvis $d(x, B) = 0$ ville $x \in B$, da B er lukket). Derfor er $d(A, B) > 0$ og

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A) > 0.$$

Antag det omvendte, at $A = B$. Det følger at $A \subset B$ og $B \subset A$, dvs. at

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A) = 0 \vee 0 = 0,$$

og vi har fået $h(A, B) = 0 \iff A = B$.

2. Vi får

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A) = d(B, A) \vee d(A, B) = h(B, A).$$

3. Vi viser først, at $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$. For alle $a \in A$, og for alle $c \in C$ har vi

$$\begin{aligned} d(a, B) &= \min\{d(a, b) : b \in B\} \\ &\leq \min\{d(a, c) + d(c, b) : b \in B\} \\ &= d(a, c) + \min\{d(c, b) : b \in B\} \\ &= d(a, c) + d(c, B). \end{aligned}$$

Da C er kompakt kan vi nu vælge $c = c_0$ sådan at $d(a, c_0) = d(a, C)$. For dette c_0 gælder specielt at $d(c_0, B) \leq \max\{d(c, B) : c \in C\} = d(C, B)$, så at det følger at

$$d(a, B) \leq d(a, C) + d(B, C).$$

Vi kan så vælge $a = a_0$ sådan at $d(a_0, B) = d(A, B)$ (da A er kompakt) og vi får:

$$\begin{aligned} d(A, B) &\leq d(a_0, C) + d(C, B) \\ &\leq \max\{d(a, C) : a \in A\} + d(C, B) \\ &= d(A, C) + d(C, B), \end{aligned}$$

som vi skulle vise. Tilsvarende fås $d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A)$. Nu bruger vi det lige viste og får:

$$\begin{aligned} h(A, B) &= d(A, B) \vee d(B, A) \\ &\leq (d(A, C) + d(C, B)) \vee (d(B, C) + d(C, A)) \\ &\leq (h(A, C) + h(C, B)) \vee (h(B, C) + h(C, A)) \\ &= h(A, C) + h(C, B). \end{aligned}$$

Vi slutter, at h er en metrik. $\square$

Nu kommer vi til det mest interessante resultat om $\mathcal{H}(X)$: det metriske rum $(\mathcal{H}(X), h(d))$ er fuldstændigt. Dette er et udmærket resultat, da dette betyder vi kan lave Cauchy-følger af hvilke som helst mængder i $\mathcal{H}(X)$ og være klar over at de konvergerer mod et aktuelt objekt. At lave disse Cauchy-følger via approximationsmetoder bliver vores centrale metode ved at lave fraktaler:

Sætning 3. Lad (X, d) være et fuldstændigt metrisk rum. Så er $\mathcal{H}(X)$ et fuldstændigt metrisk rum. Altså gælder at hvis $\{A_n \in \mathcal{H}(X)\}_{n=1}^{\infty}$ er en Cauchy følge i $\mathcal{H}(X)$ at der findes et $A \in \mathcal{H}(X)$ så

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{H}(X).$$

A kan karakteriseres ved følgende:

$$A = \{x \in X : \text{der findes en Cauchy følge } \{x_n \in A_n\} \text{ som konvergerer mod } x\}. \quad (*)$$

Inden vi beviser sætningen mangler vi nogle detaljer.

Definition 9. Lad $S \subset X$ og lad $\Gamma \geq 0$. Mængden $S + \Gamma = \{y \in X : d(x, y) \leq \Gamma \text{ hvor } x \in S\}$ kaldes *udvidelsen* af S med en kugle af radius Γ . $\square$

Lemma 1. Lad $A, B \in \mathcal{H}(X)$ hvor (X, d) er et metrisk rum. Lad $\epsilon > 0$. Så er

$$h(A, B) \leq \epsilon \iff A \subset B + \epsilon \text{ og } B \subset A + \epsilon.$$

Bevis: At $h(A, B) \leq \epsilon$ er ensbetydende med at $d(A, B) \leq \epsilon$ og $d(B, A) \leq \epsilon$. Det er derfor nok at vise at

$$d(A, B) \leq \epsilon \iff A \subset B + \epsilon.$$

Antag derfor at $d(A, B) \leq \epsilon$. Dette betyder at $\max\{d(a, B) : a \in A\} \leq \epsilon$ hvilket giver at $d(a, B) \leq \epsilon$ for alle $a \in A$. Dvs. at $a \in B + \epsilon$ for alle $a \in A$, så vi har fået $A \subset B + \epsilon$. Antag dernæst, at $A \subset B + \epsilon$. Betragt $d(A, B) = \max\{d(a, B) : a \in A\}$. For hvert $a \in A$ findes nu et $b \in B$ sådan at $d(a, b) \leq \epsilon$, hvilket giver $d(a, B) \leq \epsilon$. Da dette gælder for alle $a \in A$ fås $d(A, B) \leq \epsilon$. $\square$

Lemma 2. Hvis S er kompakt er $S + \Gamma$ lukket.

Bevis: Lad $(a_n)_{i=0}^{\infty}$ være en konvergent følge med $a_n \in S + \Gamma$ og $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Der findes, for hvert a_n , et $x_n \in S$ sådan at $d(a_n, x_n) \leq \Gamma$. Da S er kompakt har x_n en konvergent delfølge $y_n = x_{k_n}$, med $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in S$, hvor $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ er en voksende følge af hele tal. Da (a_n) er konvergent er hver delfølge af (a_n) også

konvergent, med samme grænse, a . Vi sætter $b_n = a_{k_n}$. Vi har $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ og for alle $n \in \mathbb{N}$ har vi $d(y_n, b_n) \leq \Gamma$. Nu er det nok at vise at $d(a, y) \leq \Gamma$, da $y \in S$. Lad $\epsilon > 0$ være givet og lad $N \in \mathbb{N}$ være stort nok så at $n \geq N$ giver $d(b_k, y) \leq \epsilon/2$ og $d(y, y_k) \leq \epsilon/2$. Vi får så:

$$d(a, y) \leq d(a, b_n) + d(b_n, y_n) + d(y_n, y) \leq \epsilon/2 + \Gamma + \epsilon/2 = \Gamma + \epsilon.$$

Da dette gælder for alle $\epsilon > 0$ har vi $d(a, y) \leq \Gamma$ og $a \in S + \Gamma$. $\square$

Lemma 3 (Extension lemma). Lad (X, d) være et metrisk rum. Lad $\{A_n, n = 1, 2, \dots\}$ være en Cauchy følge af mængder i $(\mathcal{H}(X), h(d))$. Lad $(n_j)_{j=1}^\infty$ være en følge af hele tal

$$0 < n_1 < n_2 < \dots.$$

Antag at vi har en Cauchy følge $\{x_{n_j}, j = 1, 2, 3, \dots\}$ i (X, d) , med $x_{n_j} \in A_{n_j}$. Så findes der en Cauchy følge $\{\tilde{x}_n \in A_n : n = 1, 2, \dots\}$ sådan at $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$, for alle $j = 1, 2, 3, \dots$

Bevis: Vi konstruerer følgen $\{\tilde{x}_n \in A_n : n = 1, 2, \dots\}$ på følgende måde: For hvert $n \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ vælger vi $\tilde{x}_n \in \{x \in A_n : d(x, x_{n_1}) = d(x_{n_1}, A)\}$, d-v.s. at $\tilde{x}_n$ er en af punktene i A_n som ligger tættest på x_{n_1} . Den slags punkt findes da A_n er kompakt. Mere generelt kan vi, med $j = 2, 3, \dots$ for hvert $n \in \{n_{j-1} + 1, \dots, n_j\}$ vælge $\tilde{x}_n \in \{x \in A_n : d(x, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A)\}$. Vi har nu, for hvert $n \in \mathbb{N}$ defineret et $\tilde{x}_n \in X$. Øjensynligt er $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$ og $x_n \in A_n$ for alle $j \in \mathbb{N}$ og $n \in \mathbb{N}$, som ønsket. Vi viser så at dette er en Cauchy følge.

Lad derfor et $\epsilon > 0$ være givet. Der findes N_1 så at $n_k, n_j \geq N_1$ medfører at $d(x_{n_k}, x_{n_j}) < \epsilon/3$, da (x_{n_j}) er en Cauchy følge. Da (A_n) er også en Cauchy følge (i $\mathcal{H}(X)$) findes N_2 så $m, n \geq N_2$ medfører $d(A_n, A_m) \leq \epsilon/3$. Vi sætter $N = \max\{N_1, N_2\}$ og bemærker at:

$$d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \tilde{x}_n)$$

hvor $m \in \{n_{j-1} + 1, n_{j-1} + 2, \dots, n_j\}$ og $n \in \{n_{k-1} + 1, n_{k-1} + 2, \dots, n_k\}$. Da $h(A_m, A_{n_j}) \leq \epsilon/3$ (da $n_j \geq m \geq N$) findes der et $y \in A_m \cap B(x_{n_j}, \epsilon/2)$ hvilket giver $d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_m) \leq \epsilon/3$. På samme måde fås $d(x_{n_k}, \tilde{x}_n) \leq \epsilon/3$. Vi får derfor

$$d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon,$$

så $(\tilde{x}_n)$ er en Cauchy følge. $\square$

Nu er vi til sidst klar til at give bevis for sætning 3:

Bevis for Sætning 3: Lad $\{A_n\}$ være en Cauchy følge i $\mathcal{H}(X)$ og lad A være defineret som ovenfor. Vi viser følgende:

1. $A \neq \emptyset$;
2. A er lukket og derfor fuldstændigt, da X er fuldstændigt;
3. for $\epsilon > 0$ findes der et N sådan at for $n \geq N$, $A \subseteq A_n + \epsilon$;
4. A er totalt begrænset og derfor fås af 2. at den er kompakt;
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$.

Bevis for 1. Vi laver en Cauchy følge $(a_i)_{i=1}^\infty$, med $a_i \in A_i$. Da (A_i) er en Cauchy-følge kan vi lave en følge af hele tal $N_1 < N_2 < \dots < N_n < \dots$ sådan at

$$h(A_m, A_n) < \frac{1}{2^i} \quad m, n \geq N_i.$$

Lad $x_{N_1} \in A_{N_1}$. Da $h(A_{N_1}, A_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$ kan vi finde et $x_{N_2} \in A_{N_2}$ sådan at $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$. Antag at vi har valgt en endelig følge $x_{N_i} \in A_{N_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$ hvor $d(x_{N_{i-1}}, x_{N_i}) \leq 1/2^{i-1}$. Da $h(A_{N_k}, A_{N_{k+1}}) \leq 1/2^k$, og $x_{N_k} \in A_{N_k}$ kan vi finde $x_{N_{k+1}} \in A_{N_{k+1}}$ sådan at $d(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) \leq 1/2^k$. Vi kan for eksempel vælge $x_{N_{k+1}}$ som den punkt i $A_{N_{k+1}}$ som er tættest på x_{N_k} . Af induktion følger at vi kan finde en uendelig følge (x_{N_i}) , med $x_{N_i} \in A_{N_i}$ sådan at $d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) \leq 1/2^i$. For at vise at dette er en Cauchy følge, lad $\epsilon > 0$ og vælg N_ϵ sådan at

$$\sum_{i=N_\epsilon}^{\infty} 1/2^i < \epsilon.$$

For $m > n \geq N_\epsilon$ fås nu

$$\begin{aligned} d(x_{N_m}, x_{N_n}) &\leq d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + d(x_{N_{m+1}}, x_{N_{m+2}}) + \dots + d(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) \\ &< \sum_{i=N_\epsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \epsilon. \end{aligned}$$

Så $(x_{N_i})_{i=1}^\infty$ er en Cauchy følge. Af extension lemmaen fås at der findes en Cauchy følge (a_i) med $a_{N_i} = x_{N_i}$ og $a_i \in A_i$. Da X er fuldstændigt er (a_i) konvergent, og per definition ligger $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$ i A , dvs. at $A \neq \emptyset$. $\square$

Bevis for 2. Vi viser næst, at A er lukket. Antag at $\{a_i \in A\}$ er en følge som konvergerer mod en punkt a . Vi må vise at $a \in A$. Fra definitionen af A ved vi at der findes en følge for hvert a_i , med $x_{i,n} \in A_n$ sådan at $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{i,n} = a_i$. Der findes en voksende følge af positive tal $(N_i)_{i=1}^\infty$ sådan at $d(a_N, a) < 1/i$. Der findes også en delfølge af hele tal (m_i) sådan at $d(x_{N_i, m_i}, a_{N_i}) \leq 1/i$ og vi får:

$$d(x_{N_i, m_i}, a) \leq d(x_{N_i, m_i}, a_{N_i}) + d(a_{N_i}, a) \leq 2/i,$$

så hvis vi sætter $y_{m_i} = x_{N_i, m_i}$ får vi at $y_{m_i} \in A_{m_i}$ og $\lim_{i \rightarrow \infty} y_{m_i} = a$. Af extension lemmaen følger at denne følge kan laves til en følge $(y_i)_{i=1}^{\infty}$, med $y_i \in A_i$ og $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = a$. Følgen (y_i) opfylder betingelsen i (*), hvilket viser at $a \in A$ og vi har fået at A er lukket. $\square$

Bevis for 3. Lad $\epsilon > 0$ være givet. Da A_n er en Cauchy følge, findes der et N sådan at for $m, n \geq N$, $h(A_m, A_n) \leq \epsilon$. Sæt $n \geq N$ og $m \geq n$. Af Lemma 1 følger nu at

$$A_m \subset A_n + \epsilon.$$

Vi viser at der også gælder $A \subset A_n + \epsilon$. Vi antager derfor at $a \in A$. Det følger af definitionen (*) at der er en følge $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ med $a_i \in A_i$, som konvergerer mod a . Vi kan antage at N er stor nok så at $d(a_m, a) \leq \epsilon$ for $m \geq N$. Da $A_m \subset A_n + \epsilon$ er $a_m \in A_n + \epsilon$. Og da A_n er kompakt er $A_n + \epsilon$ lukket, ifølge Lemma 2. Det følger at $a = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m$ må ligge i $A_n + \epsilon$. Dette viser at $A \subset A_n + \epsilon$. $\square$

Bevis for 4. Antag at A ikke er totalt begrænset. Det betyder at for mindst et $\epsilon > 0$ findes der ikke et ϵ -net. Så der findes en uendelig følge $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ med $x_i \in A$ sådan at $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ for $i \neq j$ (hvis der var kun endelig mange punkter $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ med $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ kunne vi tilføje dem til et ϵ -net). Vi viser at dette er en modstrid. Fra 3. ved vi, at for stort nok n er $A \subset A_n + \epsilon$. Det følger, at der er, for hvert x_i , et $y_i \in A_n$ med $d(x_i, y_i) \leq \epsilon/3$. Da A_n er kompakt findes der en konvergent delfølge af y_i , $(y_{k_i})_{i=1}^{\infty}$. Følgen er også en Cauchy følge, så for stort nok N med $i, j \geq N$ gælder at $d(y_{n_i}, y_{n_j}) \leq \epsilon/3$, og vi har fået

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, x_{n_j}) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

hvilket er en modstrid. $\downarrow$ Dette viser at A er totalt begrænset og da den er lukket, ifølge 2, er den kompakt. $\square$

Bevis for 5. At $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ er ensbetydende med at der for alle $\epsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$ sådan at $h(A_n, A) \leq \epsilon$ for alle $n \geq N$. Fra Lemma 1 har vi at dette er ensbetydende med at $A \subset A_n + \epsilon$ og $A_n \subset A + \epsilon$ for $n \geq N$ og fra 3. er det nok at vise $A_n \subset A + \epsilon$, da vi allerede har vist den anden inklusion. Lad nu ϵ være givet og lad N være så stort at $m, n \geq N$ medfører at $h(A_m, A_n) \leq \epsilon/2$. Det følger at $A_m \subset A_n + \epsilon/2$. Vi viser at for $n \geq N$ er $A_n \subset A + \epsilon$. Lad $y \in A_n$. Der findes en voksende følge $(N_i)_{i=1}^{\infty}$ sådan at $n < N_1 < N_2 < \dots$ og

$$m, k \geq N_j \implies A_m \subset A_k + \epsilon/2^{j+1}.$$

Specielt gælder at $A_n \subset A_{N_1} + \epsilon/2$. Da $y \in A_n \subset A_{N_1} + \epsilon/2$ findes der et $x_{N_1} \in A_{N_1}$ sådan at $d(y, x_{N_1}) \leq \epsilon/3$. Og da $x_{N_1} \in A_{N_1}$, findes der en punkt $x_{N_2} \in A_{N_2} \subset A_{N_1} + \epsilon/2^2$ sådan at $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \epsilon/2^2$. Fortsætter vi på samme måde

kan vi lave en følge $x_{N_1}, x_{N_2}, x_{N_3} \dots$ sådan at $x_{N_j} \in A_{N_j}$ og $d(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) \leq \epsilon/2^{j+1}$. Dette er en Cauchy følge, da vi for $k, m \in \mathbb{N}$ med $m > k$ har

$$\begin{aligned} d(x_{N_k}, x_{N_m}) &\leq d(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) + d(x_{N_{k+1}}, x_{N_{k+2}}) + \dots + d(x_{N_{m-1}}, x_{N_m}) \\ &\leq \epsilon/2^{k+1} + \epsilon/2^{k+2} + \dots + \epsilon/2^m \\ &\leq \epsilon/2^k. \quad (*) \end{aligned}$$

Det følger, siden A er en lukket mængde, at (x_{N_j}) konvergerer mod et punkt $x \in A$. Ved at sætte $k := 1$ og $m := j$ i $(*)$ fås videre

$$d(y, x_{N_j}) \leq d(y, x_{N_1}) + d(x_{N_1}, x_{N_j}) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

for alle $j \in \mathbb{N}$. Uligheden $d(y, x_{N_j}) \leq \epsilon$ medfører at $d(y, x) \leq \epsilon$, hvilket viser at $A_n \subset A + \epsilon$ for $n \geq N$. Vi har nu vist at $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, og slutter at $(\mathcal{H}(X), h)$ er et fuldstændigt metrisk rum. $\square$

2 Kontraktive afbildninger, fixpunktssætningen

Definition 10. En afbildning $f : X \rightarrow X$ på et metrisk rum (X, d) kaldes *kontraktiv* eller en *kontraktion* hvis der findes en konstant $0 \leq s < 1$ sådan at

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Hvert tal s som opfylder betingelsen ovenfor kaldes en *kontraktionskonstant* for f . $\square$

Definition 11. Lad (X, d) være et metrisk rum og $f : X \rightarrow X$ en afbildning. Punkten $x_f \in X$ siges at være en *fixpunkt* for afbildningen hvis $f(x_f) = x_f$. $\square$

Lemma 4. En kontraktiv afbildning er kontinuert.

Bevis: Lad f være en kontraktiv afbildning på det metriske rum (X, d) med kontraktionskonstant s . Lad $\epsilon > 0$ være givet og sæt $\delta = \epsilon/s$. Vi får:

$$d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y) < s\delta = \epsilon.$$

$\square$

Vi bruger notationen $f^{\circ n}(x)$ for iterationer af funktionen f , dvs.

$$f^{\circ n}(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_n.$$

Med $x \wedge y$ betegner vi minimum af tallene x og y . Vi viser nu det mest interessante resultat om kontraktive afbildninger:

Sætning 4 (Banach's fixpunktssætning). Lad (X, d) være et metrisk rum og lad f være en kontraktion på X . Så har afbildningen et og kun et fixpunkt $x_f \in X$. Dette fixpunkt er givet ved

$$x_f = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x),$$

for alle $x \in X$ (uafhængigt af x).

Bevis: Lad $x \in X$ og $0 \leq s < 1$ være en kontraktionskonstant for f . Vi får

$$d(f^{\circ n}(x), f^{\circ m}(x)) \leq s^{m \wedge n} d(x, f^{\circ |n-m|}(x)),$$

for alle $m, n \in \mathbb{N}$. Det følger at

$$\begin{aligned} d(x, f^{\circ k}(x)) &\leq d(x, f(x)) + d(f(x), f^{\circ 2}(x)) + \cdots + d(f^{\circ(k-1)}(x), f^{\circ k}(x)) \\ &\leq (1 + s + s^2 + \cdots + s^{k-1}) d(x, f(x)) \\ &\leq (1 - s)^{-1} d(x, f(x)), \end{aligned}$$

og at

$$d(f^{\circ n}(x), f^{\circ m}(x)) \leq s^{m \wedge n} \cdot (1 - s)^{-1} \cdot d(x, f(x)).$$

Da $|s| < 1$ ser vi at $(f^{\circ n}(x))_{n=1}^{\infty}$ er en Cauchy følge: for et givet $\epsilon > 0$ vælger vi $N \in \mathbb{N}$ stort nok for at $s^N \leq \epsilon$ og lader $n, m \geq N$. Da X er fuldstændigt eksisterer grænsen

$$x_f = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x)$$

og vi har $x_f \in X$. Fra Lemma 4 ved vi at f er kontinuert. Vi får:

$$f(x_f) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f^{\circ n}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ(n+1)}(x) = x_f.$$

Vi har derfor vist at x_f er et fixpunkt. For at indse at den er entydig antager vi at x_f og y_f er begge fixpunkter for afbildningen. Da f er kontraktiv er

$$d(x_f, y_f) = d(f(x_f), f(y_f)) \leq s \cdot d(x_f, y_f),$$

og da $0 \leq s < 1$ kan dette kun ske hvis $d(x_f, y_f) = 0$, dvs. $x_f = y_f$. □

Hele pointen med kontraktive afbildninger er at approksimere fraktaler. Under visse omstændigheder forekommer fraktaler som fixpunkter af en kontraktiv afbildning på $\mathcal{H}(X)$. I det følgende bruger vi definition, for et kompakt mængde $S \in \mathcal{H}(X)$ og en afbildning $w : X \rightarrow X$:

$$w(S) = \{w(x) : x \in X\},$$

dvs. at en afbildning på et metrisk rum X inducerer en naturlig afbildning på den metriske rum $\mathcal{H}(X)$. Dette giver os muligheden om at tale om "sædvanlige" afbildninger, lige som lineære eller rationale afbildninger på $\mathcal{H}(X)$. Vi er interesseret i virkningen af disse afbildninger på hele mængder, ikke bare punkter i mængden. Vi har brug for nogle lemmaer om kontraktive afbildninger på $\mathcal{H}(X)$:

Lemma 5. Lad $w : X \rightarrow X$ være en kontinuert funktion på det metriske rum (X, d) . Så afbilder w , $\mathcal{H}(X)$ ind i sig selv.

Bevis: Vi må vise at en kontinuert funktion afbilder kompakte mængder på kompakte mængder. Dette er et velkendt og fundamentalt resultat om kompakte mængder og kan udelades her. $\square$

Lemma 6. Lad $w : X \rightarrow X$ være en kontraktion på X med kontraktionskonstant s . Den inducerede afbildning w på $\mathcal{H}(X)$, defineret ved

$$w(B) = \{w(x) : x \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{H}(X)$$

er en kontraktion på $\mathcal{H}(X)$, med kontraktionskonstant s .

Bevis: Fra Lemma 4 følger det at w er kontinuert, så Lemma 5 giver at w afbilder $\mathcal{H}(X)$ i sig selv. Antag at $B, C \in \mathcal{H}(X)$. Vi får:

$$\begin{aligned} d(w(B), w(C)) &= \max\{\min\{d(w(x), w(y)) : y \in C\} : x \in B\} \\ &\leq \max\{\min\{s \cdot d(x, y) : y \in C\} : x \in B\} = s \cdot d(B, C). \end{aligned}$$

På den samme måde får vi $d(w(C), w(B)) \leq s \cdot d(C, B)$. Det følger, at

$$\begin{aligned} h(w(B), w(C)) &= d(w(B), w(C)) \vee d(w(C), w(B)) \\ &\leq s \cdot d(B, C) \vee d(C, B) \leq s \cdot h(B, C), \end{aligned}$$

hvilket viser at h er en kontraktion på $\mathcal{H}$, med kontraktionskonstant s . $\square$

Dette er det første konkrete eksempel om approksimation af mængder i $\mathcal{H}(X)$: Ved at vælge en kontraktiv afbildning på X får vi umiddelbart en kontraktiv afbildning på $\mathcal{H}(X)$. Men som regel vil disse afbildning ikke være særlig interessante. Der findes en vigtig metode for at sammensætte kontraktive afbildninger på $\mathcal{H}(X)$ for at lave en ny, nemlig ved at sætte

$$W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_n(A) = \bigcup_{k=1}^n w_k(A),$$

hvor $A \in \mathcal{H}(X)$ og $w_1, \dots, w_n$ er kontraktive afbildninger. Ved at vælge $w_1, \dots, w_n$ på en snedig måde kan vi modellere et stort antal velkendte fraktaler og konstruere nye. Men først bør vi redegøre, at afbildningen W defineret ovenfor, selv er en kontraktiv afbildning. For det mangler vi følgende, lidt tekniske, lemma:

Lemma 7. For alle $A, B, C, D \in \mathcal{H}(X)$ gælder at

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq h(A, B) \vee h(C, D),$$

hvor h , som sædvanligt, er Hausdorff metrikken.

Bevis: Vi viser først at for $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ gælder

$$B \subset C \implies d(A, C) \leq d(A, B). \quad (*)$$

For $x \in X$ er $d(x, C) \leq d(x, B)$ da

$$\begin{aligned} d(x, C) &= \min\{d(x, y) : y \in C\} \\ &= \min\{d(x, y) : y \in B\} \wedge \min\{d(x, y) : y \in B \setminus C\} \\ &\leq \min\{d(x, y) : y \in B\} \\ &= d(x, B). \end{aligned}$$

Vælg $a \in X$ sådan at $d(a, C) = d(A, C)$. Det følger at

$$d(A, B) \geq d(a, B) \geq d(a, C) = d(A, C),$$

hvoraf (*) følger. Vi viser næst, at for $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ gælder

$$d(A \cup B, C) = d(A, C) \vee d(B, C). \quad (**)$$

Vi får

$$\begin{aligned} d(A \cup B, C) &= \max\{d(x, C) : x \in A \cup B\} \\ &= \max\{d(x, C) : x \in A \text{ eller } x \in B\} \\ &= \max\{d(x, C) : x \in A\} \vee \max\{d(x, C) : x \in B\} \\ &= d(A, C) \vee d(B, C). \end{aligned}$$

Bruger vi (*) fås nu, da vi bemærker at $C \subset C \cup D$ og $D \subset C \cup D$:

$$d(A, C \cup D) \leq d(A, C) \quad \text{og} \quad d(B, C \cup D) \leq d(B, D),$$

og ved brug af (**) fås

$$d(A \cup B, C \cup D) = d(A, C \cup D) \vee d(B, C \cup D) \leq d(A, C) \vee d(B, D).$$

Udsagnet $d(C \cup D, A \cup B) \leq d(C, A) \vee d(D, B)$ ses helt tilsvarende ved brug af (*) og (**). Til sidst får vi så:

$$\begin{aligned} h(A \cup B, C \cup D) &= d(A \cup B, C \cup D) \vee d(C \cup D, A \cup B) \\ &\leq (d(A, C) \vee d(B, D)) \vee (d(C, A) \vee d(D, B)) \\ &= (d(A, C) \vee d(C, A)) \vee (d(B, D) \vee d(D, B)) \\ &= h(A, C) \vee h(B, D). \end{aligned}$$

□

Lemma 8. Lad (X, d) være et metrisk rum. Lad $\{w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ være kontraktive afbildninger på $(\mathcal{H}(X), h)$, og lad hvert w_n have kontraktionskonstant s_n , $n = 1, 2, \dots, N$. Lad $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ være givet ved

$$W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A)$$

for alle $A \in \mathcal{H}(X)$. Funktionen W er en kontraktionsafbildning på $\mathcal{H}(X)$ med kontraktionskonstant $s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$.

Bevis: For $N = 2$ har vi

$$\begin{aligned} h(W(A), W(B)) &= h(w_1(A) \cup w_2(A), w_1(B) \cup w_2(B)) \\ &\leq h(w_1(A), w_1(B)) \vee h(w_2(A), w_2(B)) \quad (\text{Af Lemma 7}) \\ &\leq s_1 h(A, B) \vee s_2 h(A, B) \\ &\leq s h(A, B). \end{aligned}$$

For $N > 2$ følger påstanden af induktion. □

Definition 12. Et *itereret funktions-system* (IFS) består af et fuldstændigt metrisk rum (X, d) sammen med en endelig mængde af kontraktioner $w_n : X \rightarrow X$ med kontraktionskonstanter s_n , for $n = 1, 2, \dots, N$. Vi noterer et IFS med

$$\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$$

og dens kontraktionskonstant er $s = \max\{s_1, \dots, s_N\}$. □

Alle fraktaler som forekommer i dette projekt er konstrueret via en slags IFS, så her kommer en sammenfatning af relevante detaljer om IFS:

Sætning 5. Lad $\{X; w_1, \dots, w_N\}$ være et itereret funktionssystem med kontraktionskonstant s . Så er afbildningen $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$, defineret ved

$$W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A)$$

for alle $A \in \mathcal{H}(X)$, en kontraktion på den fuldstændige metriske rum $(\mathcal{H}(X), h(d))$ med kontraktionskonstant s . Dvs

$$h(W(A), W(B)) \leq s \cdot h(A, B),$$

for alle $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Dens entydige fixpunkt, $A \in \mathcal{H}(X)$ opfylder

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A)$$

og fås ved

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{\circ n}(A),$$

for hvilket som helst $A \in \mathcal{H}(X)$. $\square$

Definition 13. Fixpunkten $A \in \mathcal{H}(X)$ i sætning 5 kaldes systemet's *attraktor*. $\square$

3 Fraktal dimension

Fraktal dimension er et tal vi bruger for at beskrive hvor meget af det overliggende rum fraktal *fylder op*, på en kvalitativ måde som er uafhængig af metrisk ekvivalente transformationer. Den er en udvikling af den sædvanlige dimensionsbegreb, da den er den samme som den topologiske dimension for euklidiske objekter. For fraktaler er den større end den topologiske dimensions og oftest er den ikke et helt tal. Først mangler vi en definition:

Definition 14. Lad (X, d) være et fuldstændigt metrisk rum og lad $A \in \mathcal{H}(X)$. For $\epsilon > 0$ definerer vi $\mathcal{N}(A, \epsilon)$ som det mindste antal af lukkede kugler $\overline{B}(x, \epsilon)$ som dækker hele A . Dvs, $\mathcal{N}(A, \epsilon)$ er det mindste tal N sådan at

$$A \subset \bigcup_{n=1}^N \overline{B}(x_n, \epsilon),$$

for en mængde af punkter $\{x_1, \dots, x_N\}$, med $x_i \in X$. $\square$

Vi viser at definitionen ovenfor giver mening: Mængden $\bigcup_{x \in A} B(x, \epsilon)$ er en åben overdækning af A , og da A er kompakt har den overdækning en endelig del-overdækning, $\bigcup_{n=1}^M B(x_n, \epsilon)$, med $M \in \mathbb{N}$. Så er mængden $\bigcup_{n=1}^M \overline{B}(x_n, \epsilon)$ en lukket overdækning. Lad C være mængden af lukkede overdækninger med højst M lukkede kugler, som vi lige har vist at indeholder mindst et element. Lad $f : C \rightarrow \{1, 2, \dots, M\}$ og $f(c)$ betegne antallet af lukkede kugler i overdækningen $c \in C$. Mængden $\{f(c) : c \in C\}$ er da en endelig mængde af hele tal og indeholder et mindste element, som er lig med $\mathcal{N}(A, \epsilon)$.

Definition 15. Lad $A \in \mathcal{H}(X)$, hvor (X, d) er et metrisk rum. Hvis tallet

$$D := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}$$

eksisterer er D *fraktal dimensionen* af A . $\square$

Vi skriver generelt $D(A)$ for fraktal dimensionen af $A \in \mathcal{H}(X)$. Læg også mærke til, at generelt er gælder

$$\epsilon_1 \leq \epsilon_2 \implies \mathcal{N}(A, \epsilon_1) \geq \mathcal{N}(A, \epsilon_2).$$

Sætning 6. Lad $A \in \mathcal{H}(X)$, hvor (X, d) er et metrisk rum. Sæt $\epsilon_n = Cr^n$ for et $0 < r < 1$ og $C > 0$, for alle $n \in \mathbb{N}$. Hvis grænsen

$$D := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon_n))}{\ln(1/\epsilon_n)}$$

eksisterer, er D lig med fraktal dimensionen $D(A)$.

Bevis: Lad E betegne mængden $\{\epsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$. For hvert $\epsilon > 0$ definerer vi $f(\epsilon)$ ved

$$f(\epsilon) = \max\{\epsilon_n \in E : \epsilon_n \leq \epsilon\}.$$

Antag, at $\epsilon \leq r$. Vi får

$$f(\epsilon) \leq \epsilon \leq f(\epsilon)/r$$

og derfor

$$\mathcal{N}(A, f(\epsilon)) \geq \mathcal{N}(A, \epsilon) \geq \mathcal{N}(A, f(\epsilon)/r).$$

Da $\ln(x)$ er en positive, voksende funktion for $x \geq 1$, følger det, at

$$\frac{\ln(\mathcal{N}(A, f(\epsilon)/r))}{\ln(1/f(\epsilon))} \leq \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \quad (1)$$

$$\leq \frac{\ln(\mathcal{N}(A, f(\epsilon)))}{\ln(r/f(\epsilon))}. \quad (2)$$

Antag at $\mathcal{N}(A, f(\epsilon)) \rightarrow \infty$ når $\epsilon \rightarrow 0$. Hvis det ikke gælder går $\frac{\ln(\mathcal{N}(A, f(\epsilon)))}{\ln(1/\epsilon)}$ og $\frac{\ln(\mathcal{N}(A, f(\epsilon_n)))}{\ln(1/\epsilon_n)}$ begge mod 0 og sætningen er sand. For højre siden af (2) får vi nu:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, f(\epsilon)))}{\ln(r/f(\epsilon))} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon_n))}{\ln(r/\epsilon_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon_n))}{\ln(r) + \ln(1/\epsilon_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon_n))}{\ln(1/\epsilon_n)}. \end{aligned}$$

For venstre siden får vi, videre:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, f(\epsilon)/r))}{\ln(1/f(\epsilon))} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon_{n-1}))}{\ln(1/r) + \ln(1/\epsilon_{n-1})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon_n))}{\ln(1/\epsilon_n)}. \end{aligned}$$

Så vi har fået, at venstre og højre siden i (2) konvergerer mod samme grænse. Af klemmelemmaen fra kalkulus følger at grænsen i midten eksisterer og er lig med de andre to. Dette viser påstanden. $\square$

Sætning 7 (kassetælningssætningen). Lad $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$ hvor vi bruger den Euklidiske metrik. For et givet n laver vi en overdækning af $\mathbb{R}^m$ med kasser (eller, generelt, *hypercuber*) af side-længde $1/2^n$, som en “grid”. Betegner vi en kasse med sidelængde $2l$ og center $x = (x_1, \dots, x_m)$ med

$$S(x, l) = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m : |x_1 - y_1| \leq l, \dots, |x_m - y_m| \leq l\}$$

kan vi kan, f.eks. bruge dækningen

$$M_n = \{S((x_1/2^n, \dots, x_n/2^n), 1/2^{n+1}) : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^m\}.$$

Lad $\mathcal{N}_n(A)$ betegne hvor mange kasser fra M_n skærer A , dvs. antallet af elementer $M \in M_n$ med $M \cap A \neq \emptyset$. Hvis

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}_n(A))}{\ln(2^n)},$$

så har A fraktal dimension D .

Bevis: Lad $k(n)$ betegne de mindste hele tal sådan at en kasse af sidelængde $1/2^{k(n)}$ rummes i en kugle af radius $1/2^n$. Vi viser, at der gælder

$$2^{-m} \mathcal{N}_{n-1} \leq \mathcal{N}(A, 1/2^n) \leq \mathcal{N}_{k(n)}. \quad (*)$$

En kugle af radius $1/2^n$ kan højst skære 2^m kasser fra M_{n-1} . Det følger at for $m \in \mathbb{N}$, og alle $n \in \mathbb{N}$, gælder

$$2^{-m} \mathcal{N}_{n-1} \leq \mathcal{N}(A, 1/2^n).$$

Bemærk så, at et hvis en kasse af sidelængde s er indeholdt i en kugle, så må kuglen have radius r , hvor $r^2 \geq (\frac{s}{2})^2 + \dots + (\frac{s}{2})^2 = m(\frac{s}{2})^2$, hvilket følger af Pythagoras’ sætning. Vi får:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \geq m \left(\frac{\frac{1}{2^{k(n)}}}{2}\right)^2 &\iff \frac{1}{2^{2n}} \geq m \cdot \frac{1}{2^{2k(n)+2}} \\ &\iff 2^{2k(n)+2-2n} \geq m \\ &\iff k(n) \geq n - 1 + \frac{1}{2} \log_2(m), \end{aligned}$$

så vir får $k(n) = \lceil n - 1 + (1/2) \log_2(m) \rceil$. Det følger at $\mathcal{N}(A, 1/2^n) \geq \mathcal{N}_{k(n)}$, og vi har dermed vist (*). Vi lægger nu mærke til at $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = 1$. Det følger, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}_{k(n)})}{\ln(2^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^{k(n)})}{\ln(2^n)} \cdot \frac{\ln(\mathcal{N}_{k(n)})}{\ln(2^{k(n)})} = D.$$

Vi får også:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^{-m} \mathcal{N}_{n-1})}{\ln(2^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}_{n-1})}{\ln(2^{n-1})} = D.$$

Da begge grænser konvergerer mod samme tal, D , følger af klemmelemmaen at, brugt på (*)

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}_n(A))}{\ln(2^n)},$$

og sætning 6, med $r = 1/2$ giver at D er fraktal dimensionen af A . $\square$

At ændre definition af M_n til

$$M_n = \{S((x_1/2^n, \dots, x_n/2^n) + 1/2^{n+1}, 1/2^{n+1}) : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^m\}$$

ændrer ikke resultatet i sætningen, og er lidt mere naturligt, da vores “grid” starter i $(0, 0)$ på den måde. Kassetælningssætningen er det første nyttige resultat ved explicit udregning af den fraktale dimension af et mængde $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$. I vores første eksempel illustrerer vi at den fraktale dimension af et kvadrat er 2, sådan at den faktisk er lig med den topologiske dimension. Dette gælder om alle “sædvanlige” Euklidiske objekter.

Eksempel 1. Sæt

$$\blacksquare = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}.$$

For et givet n mangler vi $(2^n)^2$ kasser fra M_n for at dække $\blacksquare$. Ifølge kassetælningssætningen har $\blacksquare$ fraktal dimension

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln((2^n)^2)}{\ln(2^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(2^n)}{\ln(2^n)} = 2.$$

$\square$

En nyttig sætning ved vurdering af den fraktale dimension, og en vigtig note om dens kvalitative karakter er at den er invariant under metrisk ækvivalens. Vi minder om, at to metriske rum (X_1, d_1) og (X_2, d_2) er ækvivalente, hvis og kun hvis, der findes en bijektiv, kontinuert afbildning $\theta : X_1 \rightarrow X_2$ sådan at metrikerne d_1 og $\tilde{d}_1(x, y) := d_2(\theta(x), \theta(y))$ er ækvivalente, dvs. der findes konstanter $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ med $c_1 < c_2$ sådan at

$$c_1 d_2(\theta(x), \theta(y)) < d_1(x, y) < c_2 d_2(\theta(x), \theta(y)).$$

Så den fraktale dimension ændres f.eks. ikke hvis vi deformer en objekt med en begrænset homeomorfi.

Sætning 8. Lad de metriske rum (X_1, d_1) og (X_2, d_2) være metrisk ækvivalente. Lad $\theta : X_1 \rightarrow X_2$ være ækvivalens-afbildningen. Antag, at $A_1 \in \mathcal{H}(X_1)$ har fraktal dimension D . Så har $A_2 := \theta(A_1)$ også fraktal dimension D , dvs.

$$D(A_1) = D(\theta(A_1)).$$

Bevis: Da (X_1, d_1) og (X_2, d_2) er ækvivalente under θ findes der positive konstanter c_1 og c_2 med

$$c_1 d_1(\theta(x), \theta(y)) < d_1(x, y) < c_2 d_2(\theta(x), \theta(y)) \quad \text{for alle } x, y \in X_1. \quad (*)$$

Vi kan antage at $c_1 < 1 < c_2$; hvis c_1 var større en eller lig med 1 ville uligheden stadig gælde selv om vi erstatter c_1 med f.eks. $1/2$. Similart for c_2 . Af $(*)$ får vi nu

$$d_2(\theta(x), \theta(y)) < \frac{d_1(x, y)}{c_1}, \quad \text{for alle } x, y \in X_1.$$

Det følger at

$$\theta(B(x, \epsilon)) \subset B(\theta(x), \epsilon/c_1). \quad (**)$$

Lad nemlig $z \in \theta(B(x, \epsilon)) \subset X_1$, med $z = \theta(w)$, hvor $w \in B(x, \epsilon)$. Det følger at $d_1(x, w) < \epsilon$ og at

$$d_2(\theta(x), \theta(w)) = d_2(\theta(x), z) < d_1(x, w)/c_1 < \epsilon/c_1,$$

så $z \in B(\theta(x), \epsilon/c_1)$. Det følger nu, fra definitionen af $\mathcal{N}(A_1, \epsilon)$, at der findes punkter $\{x_1, x_2, \dots, x_{\mathcal{N}}\} \subset X_1$, hvor $\mathcal{N} = \mathcal{N}(A_1, \epsilon)$, sådan at mængden $(B(x_n, \epsilon), n = 1, 2, \dots, \mathcal{N})$ dækker A_1 . Det følger, at $\{\theta(B(x_n, \epsilon)) : n = 1, 2, \dots, \mathcal{N}\}$ dækker A_2 og fra $(**)$ fås at $\{B(\theta(x_n), \epsilon/c_1) : n = 1, 2, \dots, \mathcal{N}\}$ er en dækning af A_2 . Derfor er

$$\mathcal{N}(A_2, \epsilon/c_1) \leq \mathcal{N}(A_1, \epsilon).$$

Lader vi $\epsilon < 1$ får vi at $\ln(1/\epsilon) > 0$ og derfor

$$\frac{\ln(\mathcal{N}(A_2, \epsilon/c_1))}{\ln(1/\epsilon)} \leq \frac{\ln(\mathcal{N}(A_1, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}.$$

Det følger at

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A_2, \epsilon/c_1))}{\ln(1/\epsilon)} \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A_1, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} = D(A_1),$$

og da

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A_2, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A_2, \epsilon/c_1))}{\ln(1/(\epsilon/c_1))} \\ &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A_2, \epsilon/c_1))}{\ln(1/\epsilon)} \end{aligned}$$

har vi fået

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A_2, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \leq D(A_1).$$

Vi viser nu en ulighed i den anden retning. Af (*) fås

$$d_1(\theta^{-1}(x), \theta^{-1}(y)) < c_2 d_2(x, y) \quad \text{for alle } x, y \in X_1.$$

Det følger, at

$$\theta^{-1}(B(x, \epsilon)) \subset B(\theta^{-1}(x), c_2 \epsilon). \quad \text{for alle } x \in X_2$$

Dette ses ved at sætte $z \in \theta^{-1}(B(x, \epsilon))$, så at der findes et $w \in B(x, \epsilon) \subset X_2$ med $z = \theta^{-1}(w)$. Det følger at $c_2 d_2(x, w) < c_2 \epsilon$ og derfor, at

$$d_1(\theta^{-1}(x), z) = d_1(\theta^{-1}(x), \theta^{-1}(w)) < c_2 d_2(x, w) \leq c_2 \epsilon,$$

så $z \in B(\theta^{-1}(x), c_2 \epsilon)$. Dette medfører

$$\mathcal{N}(A_1, c_2 \epsilon) \leq \mathcal{N}(A_2, \epsilon),$$

og for $\epsilon < 1$ gælder

$$\frac{\ln(\mathcal{N}(A_1, c_2 \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \leq \frac{\ln(\mathcal{N}(A_2, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}.$$

Det følger, at

$$\begin{aligned} D(A_1) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A_1, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A_1, c_2 \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \\ &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A_2, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}. \end{aligned}$$

Vi har nu fået

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A_2, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} = D(A_1) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{N}(A_2, \epsilon)}{1/\epsilon},$$

så vi får

$$D(A_2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A_2, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} = D(A_1),$$

hvilket skulle vises. □

Vi giver her en alternativ definition af den fraktale dimension. Den er nyttig da den eksisterer for et større antal mængder en definition 15, men den er lidt mere kompliceret, så den kan betale sig at bruge den definition hvor muligt. De to definitioner giver samme værdi hvis begge eksisterer.

Definition 16. Lad (X, d) være et fuldstændigt metrisk rum. Lad $A \in \mathcal{H}(X)$. Lad $\mathcal{N}(\epsilon)$ betegne det minimale antal af kugler af radius ϵ som dækker A . Hvis

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\sup \left(\frac{\ln(\mathcal{N}(\tilde{\epsilon}))}{\ln(1/\tilde{\epsilon})} : \tilde{\epsilon} \in (0, \epsilon) \right) \right)$$

eksisterer, så er D den fraktale dimension for A . vi bruger også generelt notationen $D = D(A)$.

Sætning 9. Lad m være et positivt helt tal og betragt det metriske rum $(\mathbb{R}^n, \text{Euklidisk})$. Den fraktale dimension $D(A)$ eksisterer for alle $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$. Lad $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$ med $A \subset B$ være givet, og lad $D(B)$ betegne den fraktale dimension af B . Så er $D(A) \leq D(B)$. Specielt fås

$$0 \leq D(A) \leq m.$$

Bevis: Vi kan antage at A er indholdt i en kasse $K \subset \mathbb{R}^m$ af sidelængde 1. Hvis den ikke var kunne vi skale og flytte den sådan at den var, uden at ændre dimensionen, ifølge sætning 8. Da $A \subset K$ har vi $\mathcal{N}(A, \epsilon) \leq \mathcal{N}(K, \epsilon)$ for alle $\epsilon > 0$. Derfor får vi, for alle $0 < \epsilon < 1$, at

$$0 \leq \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \leq \frac{\ln(\mathcal{N}(K, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}.$$

Det følger at

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(K, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}.$$

Vi ved at grænsen på højre siden eksisterer og er lig med m . Grænsen på venstre siden har derfor øvre grænsen m og eksisterer også, ifølge supremumsegenskaben for de reelle tal. Fraktal dimensionen $D(A)$ er derfor defineret og er lig med eller mindre en m , dens Euklidiske dimension. Antager vi at $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$ med $A \subset B$ får vi fra det lige viste at $D(A)$ og $D(B)$ er begge vel-definerede og da $\mathcal{N}(A, \epsilon) \leq \mathcal{N}(B, \epsilon)$ følger det på samme måde som før, hvor vi ertsatter K med B , at

$$D(A) \leq D(B),$$

som skulle vises. □

Sætning 10. Lad m være et positivt helt tal og betragt den metriske rum $(\mathbb{R}, \text{Euklidisk})$. Lad A og B tilhøre $\mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$. Antag at A 's fraktal dimension er givet ved

$$D(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}.$$

Lad $D(B)$ og $D(A \cup B)$ betegne fraktal dimensionen af B og $A \cup B$, hendholdsvis. Antag at $D(B) < D(A)$. Så er

$$D(A \cup B) = D(A).$$

Bevis: Fra sætning 9 fås at $D(A \cup B) \geq D(A)$ og vi viser, at $D(A) \leq D(A \cup B)$. Bemærk først at

$$\mathcal{N}(A \cup B, \epsilon) \leq \mathcal{N}(A, \epsilon) + \mathcal{N}(B, \epsilon).$$

Det følger at

$$\begin{aligned} D(A \cup B) &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A \cup B, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \\ &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon) + \mathcal{N}(B, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \\ &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} + \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \mathcal{N}(B, \epsilon)/\mathcal{N}(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}. \quad (*) \end{aligned}$$

Vi viser nu at $\mathcal{N}(B, \epsilon)/\mathcal{N}(A, \epsilon) < 1$ når ϵ er lille nok. Dette medfører at $0 < \ln(1 + \mathcal{N}(B, \epsilon)/\mathcal{N}(A, \epsilon)) < \ln(2)$, så den anden grænse i (*) går mod 0 når $\epsilon \rightarrow 0$. Bemærk at

$$f(\epsilon) := \sup \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(B, \tilde{\epsilon}))}{\ln(1/\tilde{\epsilon})} : \tilde{\epsilon} < \epsilon \right\}$$

er en voksende funktion af ϵ (dvs. den bliver mindre når $\epsilon \rightarrow 0$). Vi ved også, fra sætning 9, at grænsen $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\epsilon)$ eksisterer. Det følger, at for alle lille nok ϵ gælder

$$\frac{\ln(\mathcal{N}(B, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} < D(A).$$

Vi har antaget at grænsen $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}$ eksisterer, så, for ϵ lille nok gælder

$$\frac{\ln(\mathcal{N}(B, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} < \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)},$$

og det følger at (vi kan antage at $\epsilon < 1$)

$$\ln(\mathcal{N}(B, \epsilon)) < \ln(\mathcal{N}(A, \epsilon)),$$

og da $\exp$ er en voksende funktion kan vi tage $\exp$ af begge sider uden at ændre uligheden, og det fås, at

$$\frac{\mathcal{N}(B, \epsilon)}{\mathcal{N}(A, \epsilon)} < 1,$$

som skulle vises. □

Næste resultat er det mest nyttige om udregning af fraktaldimensionen af et objekt, da den giver en metode for at vurdere den helt ved brug af den IFS, fraktalen er givet ved, under visse betingelser. Vi mangler først en definition:

Definition 17. En *similitude* $w : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ er en afbildning af formen

$$w(x) = r(Mx) + v,$$

hvor M er en $m \times m$ matrix med $M^T M = 1$, $v \in \mathbb{R}^m$ og $r \in \mathbb{R}$. □

Similituder karakteriseres ved ligningen

$$d(w(x), w(y)) = r \cdot d(x, y),$$

for $x, y \in \mathbb{R}^m$, og r er en konstant i $\mathbb{R}$. Det ses, at w afbilder lukkede kugler på lukkede kugler i X . For $m = 2$ gælder at en afbildning $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er en similitude hvis den er af formen

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

eller

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) & r \sin(\theta) \\ r \sin(\theta) & -r \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

med $e, f \in \mathbb{R}^2$, $r \in \mathbb{R}$ og $0 \leq \theta < 2\pi$.

Vi mangler også en definition for at udgøre om et IFS “overlapper” eller ej. Intuitivt er det næsten klart hvad det betyder: Ved at approksimere et fraktal via et IFS kan det godt være en del af fraktalen der bliver afbildet på mere en en gang. Et eksempel er IFS’et givet ved

$$\{\mathbb{R}, w_1, w_2\}$$

med $w_1(x) = x/2$, $w_2(x) = 3x/4 + 1/4$. Dens attraktor er $[0, 1]$, hvilket ses, da $w_1([0, 1]) = [0, 1/2]$ og $w_2([0, 1]) = [1/4, 1]$ og derfor

$$w_1([0, 1]) \cup w_2([0, 1]) = [0, 1/2] \cup [1/4, 1] = [0, 1].$$

Mængdene $[0, 1/2]$ og $[1/4, 1]$ er ikke disjunkte, og faktisk har de en væsentlig del af attraktoren tilfælles, da $[0, 1/2] \cap [1/4, 1] = [1/4, 1/2]$, så vi siger at den “overlapper”. De andre to muligheder er at den er “ligeberørende” (just-touching) eller “totalt diskonnektet”. Vi mangler en definition for at gøre dette præcist. Vi kan ikke bruge fællesmængder som vi gjorde ovenfor, fordi resultatet er afhængigt af initialmængden.

Lad et IFS $\{X, w_1, \dots, w_N\}$ være givet og lad A være dens attraktor. Lad også en følge $k = (k_i)_{i=1}^\infty$, med $k_i \in \{1, \dots, N\}$ for alle $i \in \mathbb{N}$ være givet. For et $x \in X$ er følgen

$$\omega = (w_{k_1}(x), w_{k_1}(w_{k_2}(x)), w_{k_1}(w_{k_2}(w_{k_3}(x))), \dots)$$

en Cauchy følge: For at vise dette, lad $M = \max\{d(x, w_1(x)), \dots, d(x, w_N(x))\}$ og $s = \max\{s_1, \dots, s_N\}$. Vi får, for vilkårlige $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(x, w_{k_n} \circ \dots \circ w_{k_{n+m}}(x)) &\leq d(x, w_{k_n}(x)) + d(w_n(x), w_n(w_{n+1}(x))) \\ &\quad + d(w_n \circ \dots \circ w_{n+m-1}(x), w_n \circ \dots \circ w_{n+m}(x)) \\ &\leq M + s_n M + \dots + s_n \dots s_{n+m} M \\ &\leq M(1 + s + s^2 + \dots + s^m) \leq M/(1 - s), \end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned} d(w_{k_1} \circ \dots \circ w_{k_n}(x), w_{k_1} \circ \dots \circ w_{k_{n+m}}(x)) \\ \leq s_{k_1} \dots s_{k_n} d(x, w_{k_n} \circ \dots \circ w_{k_{n+m}}(x)) \\ \leq s^n M / (1 - s). \end{aligned}$$

Da $s < 1$ kan vi gøre $s^n M / (1 - s)$ som lille som vi vil, hvilket viser at ω er en Cauchy følge. Fra sætning 3 er det også klart at denne følge konvergerer mod et $\tilde{x}$ i X , og faktisk, at alle elementer i A forekommer som en grænse på denne måde. Definer en funktion $\phi : \{1, \dots, N\}^\infty \rightarrow X$ ved

$$\phi(k) = \lim_{i \rightarrow \infty} w_{k_1} \circ \dots \circ w_{k_i}(x),$$

hvor vi har valgt et konstant $x \in X$.

Definition 18. Lad et IFS $F = \{X, w_1, \dots, w_N\}$, med attraktor A , være givet og lad ϕ være som ovenfor. Hvis ϕ er *injektiv*, dvs. at hvis to følger $k = (k_i)_{i=1}^\infty$ og $m = (m_i)_{i=1}^\infty$ har mindst et forskelligt element medfører det at

$$\phi(k) \neq \phi(m),$$

så siges F at være *totalt diskonnektet*. F siges at være *ligeberørende* hvis den ikke er totalt diskonnektet, men hvis der findes en åben mængde $\mathcal{O}$ i A så

1. $w_i(\mathcal{O}) \cap w_j(\mathcal{O}) = \emptyset$ for alle $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ hvis $i \neq j$;
2. $\bigcup_{i=1}^N w_i(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$

Hvis F ikke er totalt diskonnektet eller ligeberørende er den *overlappende*. $\square$

Eksempel 2 viser et ligeberørende IFS, mens eksempel 5 viser et totalt diskonnektet IFS. Bemærk at betingelsen totalt diskonnektet medfører at mængdene $w_1(A), \dots, w_N(A)$ er alle disjunkte, da ellers ville der findes et punkt i fællesmængden af $w_i(A)$ og $w(j)$ for nogen $i, j \in \{1, \dots, N\}$, og den punkt ville have to adresser, en der startede med i og en der startede med j .

Lemma 9. Lad $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ og lad $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ med $0 < a_i < 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Antag at der findes et ϵ_0 sådan at for alle $0 < \epsilon < \epsilon_0$,

$$f(\epsilon) = f(a_1^{-1}\epsilon) + \dots + f(a_n^{-n}\epsilon).$$

Antag at grænsen $D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(f(\epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}$ eksisterer. Så er

$$1 = a_1^D + \dots + a_n^D.$$

Bevis: Vi udelader beviset denne gang. $\square$

Sætning 11. Lad $\{\mathbb{R}^m; w_1, \dots, w_N\}$ være et IFS og lad A betegne dens attraktor. Antag at w_n er en similitude med skalingskonstant s_n for hvert $n \in \{1, \dots, N\}$. Hvis IFS'et er totalt diskonnektet eller ligeberørende, så har dens attraktor fraktal dimension $D(A)$, givet som den entydige løsning af

$$\sum_{n=1}^N |s_n|^{D(A)} = 1, \quad D(A) \in [0, m].$$

Hvis IFS'et overlapper får vi $\overline{D} \geq D(A)$, hvor $\overline{D}$ er løsningen af

$$\sum_{n=1}^N |s_n|^{\overline{D}} = 1, \quad \overline{D} \in [0, \infty),$$

dvs. $\overline{D}$ giver en øvre grænse for $D(A)$.

Vi viser sætningen for et totalt diskonnektet IFS. En mere grundigt bevis på denne sætning findes bl.a. i [3]. Denne bevis bruger en alternativ definition af den fraktale dimension der kaldes *Hausdorff-Besikovich* dimensionen, men dette er lidt mere involveret end der fandtes tid til i dette projekt.

Bevis: Antag af IFS'et $\{\mathbb{R}^m; w_1, \dots, w_N\}$ med similituder $w_1, \dots, w_N$ og skalingskonstanter $s_1, \dots, s_N$, er totalt diskonnektet. Antag videre at $s_i \neq 0$ for alle $i \in \{1, \dots, N\}$, og lad $\epsilon > 0$ være givet. Vi laver to bemærkninger:

(i) For hver af similituderne w_i med skalingskonstant s_i fås

$$w_i(\overline{B}(x, \epsilon)) = \overline{B}(w_i(x), |s_i|\epsilon),$$

dvs. den afbilder en lukket kugle på en lukket kugle. Da vi har antaget at $s_i \neq 0$ er w_i invertibel, og w_i^{-1} er også en similitude, hvilket giver

$$w_i^{-1}(\overline{B}(x, \epsilon)) = \overline{B}(w_i^{-1}(x), |s_i|^{-1}\epsilon). \quad (*)$$

Vi viser at

$$\mathcal{N}(A, \epsilon) = \mathcal{N}(w_i(A), |s_i|\epsilon).$$

Sæt $\mathcal{N} = \mathcal{N}(A, \epsilon)$ og lad $M = \{x_1, x_2, \dots, x_{\mathcal{N}}\}$ være sådan at

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\mathcal{N}} \overline{B}(x_k, \epsilon).$$

Lad $a \in A$ være givet. Der findes så et $x_k \in M$ med $a \in \overline{B}(x_k, \epsilon)$, dvs. $d(x_k, a) \leq \epsilon$. Det følger, da w_i er en similitude med skalingskonstant s_i , at $d(w_i(x_k), w_i(a)) \leq |s_i|d(x_k, a) \leq |s_i|\epsilon$, så $w_i(a) \in \overline{B}(w_i(x_k), |s_i|\epsilon)$. Mængden

$$\bigcup_{k=1}^{\mathcal{N}} \overline{B}(w_i(x_k), |s_i|\epsilon)$$

er derfor en dækning af $w_i(A)$, så $\mathcal{N}(w_i(A), |s_i|\epsilon) \leq \mathcal{N}(A, \epsilon)$. Vi bruger det lige viste, hvor vi ertsatter w_i med w_i^{-1} , A med $w_i(A)$ og ϵ med $|s_i|\epsilon$ for at vise den omvendte ulighed, dvs, at $\mathcal{N}(A, \epsilon) \leq \mathcal{N}(w_i(A), |s_i|\epsilon)$, hvilket giver (*). Dette gælder um alle $w_i \in \{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ og alle $\epsilon > 0$. Sætter vi $\epsilon := |s_i|^{-1}\epsilon$ får vi endnu videre

$$\mathcal{N}(w_i(A), \epsilon) = \mathcal{N}(A, |s_i|^{-1}\epsilon). \quad (3)$$

(ii) Attraktoren A er den disjunkte forening

$$A = w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_N(A),$$

hvor hvert mængde $w_i(A)$ er kompakt (et lukket bægrænset mængde under en similitude er lukket og bægrænset, hvilket er nok for kompaktthed i $\mathbb{R}^m$). Vi kan derfor vælge $\epsilon > 0$ lille nok så for hvert $x \in \mathbb{R}^m$, hvis der gælder $\overline{B}(x, \epsilon) \cap w_i(A) \neq \emptyset$, så er $\overline{B}(x, \epsilon) \cap w_j(A) = \emptyset$ for alle $j \in \{1, \dots, N\}$ hvor $i \neq j$. Det følger, at for $\epsilon > 0$ lille nok gælder

$$\mathcal{N}(A, \epsilon) = \mathcal{N}(w_1(A), \epsilon) + \mathcal{N}(w_2(A), \epsilon) + \dots + \mathcal{N}(w_N(A), \epsilon).$$

Ved at bruge vores bemærkninger i (i) og (ii) får vi

$$\mathcal{N}(A, \epsilon) = \mathcal{N}(A, |s_1|^{-1}\epsilon) + \mathcal{N}(A, |s_2|^{-1}\epsilon) + \dots + \mathcal{N}(A, |s_N|^{-1}\epsilon).$$

Af lemma 9 følger, ved at sætte $f(\epsilon) := \mathcal{N}(A, \epsilon)$, at

$$1 = |s_1|^D + \dots + |s_n|^D.$$

□

Eksempel 2. Vores første non-trivielle eksempel kaldes *Sierpinski trekanten*. Vi definerer et IFS på $(\mathbb{R}^2, \text{Euklidisk})$ ved

$$\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3\}$$

hvor

$$w_1(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad w_2(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

og

$$w_3(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

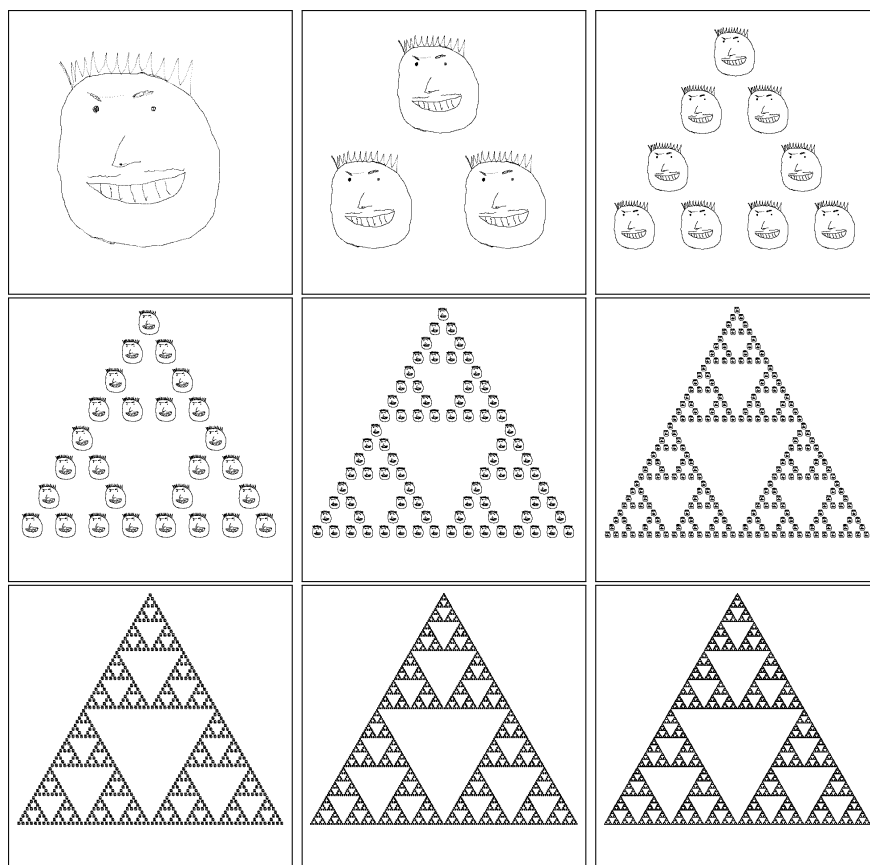
for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Funktionerne w_1, w_2 og w_3 er lineære funktioner som simpelthen skaler den mængde de virker på om 1/2 og flytter den om vektorerne $(0, 0)$, $(1/2, 0)$ og $(1/2, \sqrt{3}/2)$, henholdsvis. Funktionen $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ er givet ved

$$W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup w_3(A)$$

for alle $A \in \mathcal{H}(X)$ og Sierpinski trekanten er mængden S givet ved

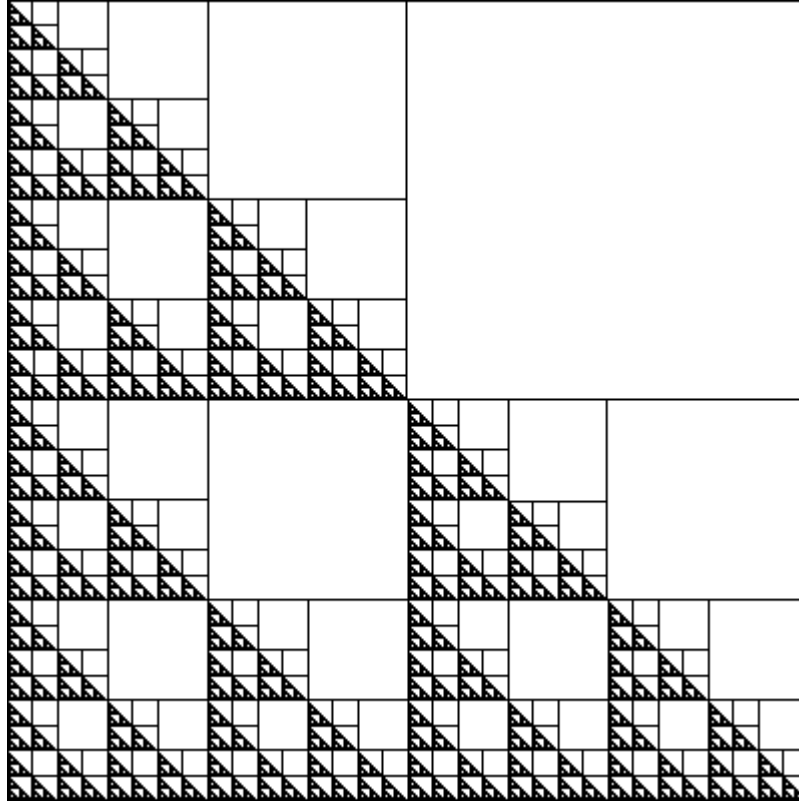
$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{\circ n}(A).$$

Denne grænse eksisterer ifølge Sætning 4 om IFS'er og er systemets attraktor. De første to billeder i figur 3 viser hvordan W afbilder en tilfældig mængde ved at skale den og flytte på to forskellige steder. Dette procedur gentages på resultatet. Figur 3 viser mængdene $A, W(A), W(W(A)), \dots, W^{\circ 8}(A)$ og giver et godt estimat for S .



Figur 3: Konvergens af en tilfældig kompakt mængde mod Sierpinski trekanten.

For at udregne fraktal dimensionen $D(S)$ kan vi bruge kassetælningssætningen. Inden vi gør det bemærker vi at $D(S)$ er invariant under bægrænsede homeomorfier, som f.eks. lineære afbildninger på kompakte mængder, og det er meget nemmere at vurdere kassetælningsdimensionen af figur 4. Den originale mængde har verticer i $(0, 0)$, $(1, 0)$ og $(1/2, \sqrt{3}/2)$. Ved den lineære afbildning



Figur 4: Sierpinski trekanten under afbildningen θ , samt dækninger givet ved 1, 3, 9, 27, 81 og 243 kasser af sidelængde 1, $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$ og $1/32$ henholdsvis.

$\theta(x, y)$, givet ved

$$\theta(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

fås mængden i figur 4, som har verticer i $(0, 0)$, $(0, 1)$ og $(1, 0)$. Vi mangler 3^n kasser af sidelængde $(1/2^n)$ for at dække $\theta(S)$, så fra kassetælningsætningen fås at $\theta(S)$, og dermed også S , har fraktal dimension

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n)}{\ln(3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(2)}{n \ln(3)} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 1.5850 \dots$$

En anden, mere naturlig måde at udregne $D(S)$ er at bemærke at IFS'et er lige berørende, og at da afbildningene i IFS'et defineres helt via skaling og translation (med skalingskonstanter $s_1 = s_2 = s_3 = 1/2$) er de similituder, og vi kan bruge sætning 11. Den fraktale dimension $D := D(S)$ fås så ved løsningen af

$$3 \cdot (1/2)^D = 1,$$

dvs.

$$D = \log_{1/2}(1/3) = \frac{\ln(1/3)}{\ln(1/2)} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)},$$

hvilket er konsistent med kassetællingen. $\square$

Eksempel 3. Som et andet eksempel af sætning 11 giver vi et alternativt bevis på at kvadraten $\blacksquare \subset \mathbb{R}^2$ har fraktal dimension 2. Lad

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

dvs. M er matricen som skaler en vektor om $1/2$. Betragt IFS'et

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbb{R}^2, w_1(x) &= Mx, w_2(x) = Mx + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ w_3(x) &= Mx + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, w_4(x) = Mx + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}.$$

Dens afbildninger er alle similituder med skalingskonstant $1/2$, og systemet er ligeberørende (afbildninger overlapper kun på punktene $(1/2, y)$ og $(x, 1/2)$, $0 < x, y < 1$), så sætning 11 giver at fraktal dimensionen af dens attraktor er D hvor D er løsningen til

$$4 \cdot (1/2)^D = 1,$$

dvs. $(1/2)^D = 1/4$, hvilket giver $D = 2$. Det er ikke svært at se at $W^{\circ n}(A)$, hvor

$$W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup w_3(A) \cup w_4(A)$$

for $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, konvergerer mod $\blacksquare$ når $n \rightarrow \infty$. $\square$

Eksempel 4. Lad to IFS'er være givet,

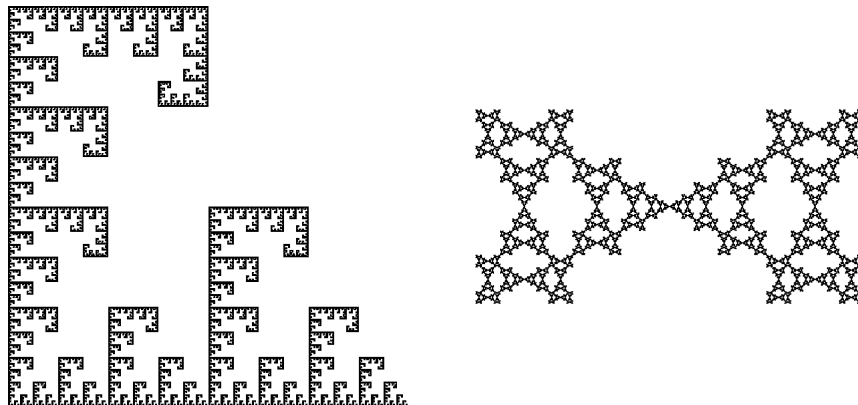
$$A = \{\mathbb{R}^2, v_1, v_2, v_3\} \quad \text{og} \quad B = \{\mathbb{R}^2, w_1, w_2, w_3\}.$$

Lad afbildningene v_1, v_2 og v_3 være givet ved

$$v_1(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$v_2(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_3(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix},$$



Figur 5: To faktaler med samme fraktal dimension som Sierpinski trekanten, $D = \ln(3)/\ln(2)$

dvs. v_1 er en skaling om $1/2$ mens v_2 og v_3 er en drejning om $\pi/2$, en skaling om $1/2$ og flytning om $\begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -3/4 \\ 0 \end{pmatrix}$ henholdsvis. Lad så afbildningene w_1 , w_2 og w_3 være givet ved

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ w_2(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ w_3(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dvs w_1 er en skaling med $1/2$, w_2 er en skaling med $1/2$ og flytning um $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ og w_3 er en skaling om $1/2$, en drejning om $-\pi/2$ og en flytning om $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Alle afbildningene i A og B har skalingsfaktor $1/2$ og deres attraktorer er ligeberørende (dette er nemt at se af billederne). Det følger derfor af sætning 11 at de har samme fraktal dimension, faktisk den samme som Sierpinski trekanten i eksempel 2, nemlig $\ln(3)/\ln(2)$. $\square$

Eksempel 5. Lad et IFS være givet ved

$$\{\mathbb{R}^2, w_1, w_2\},$$

hvor

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

og

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Dette er en simpel fraktal spiral. Tilfældet $c = 9/10$ og $\theta = \pi/6$ er vist i figur 6. Forskellige spiraler fås ved at variere skalingskonstanten c og vinklen θ , og konstanterne to i afbildningen w_1 . Intuitivt vil større skalingsfaktorer give en "tættere" spiral. Dette passer med dens fraktale dimension, som godt kan udregnes af sætning 11 når spiralen er totalt diskonnektet eller ligeberørende. Bemærk at spiralen i figur 7 er foreningen af to kopier af sig selv; en ligger længst til venstre og den anden udgør resten af spiralen. Den lille spiral er selv foreningen af to disjunkte kopier af sig selv. Vi kan forsætte på den måde. Punkter der ligger i lille spiralen i hvert trin er punkter under afbildningen af w_1 og de andre punkter forekommer ved afbildningen w_2 . Vi kan derfor lave en følge for hvert punkt (eller en "adresse") lige som i definition 18, og det ses at inge to punkter på S_1 har samme adresse. Dette medfører at S_1 er totalt diskonnektet og sætning 11 giver dens fraktale dimension $D = D(S_1)$ ved ligningen

$$(9/10)^D + (1/3)^D = 1,$$

hvilket kan approksimeres via Newton-Rapshon metoden, som rod i $f(x) = (9/10)^x + (1/3)^x - 1$, og giver $D \approx 1.6637$. $\square$

Eksempel 6. Som vores sidste eksempel kan vi tage *Cantor-mængden*, der fås som attraktoren af IFS'et

$$\left\{ \mathbb{R}, \frac{1}{3}x, \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \right\}.$$

Det set umiddelbart at den er total diskonnektet, og dens dimension fås som løsningen til

$$2 \cdot (1/3)^D = 1,$$

dvs.

$$D = \frac{\ln(1/2)}{\ln(1/3)} = \ln(2)/\ln(3) \approx 0.6309.$$

Dens topologiske dimension er 0, da den består kun af punkter, men dens fraktal dimension er 0.6309, hvilket viser hvor tæt den er. Vi kan tage et andet, lignende eksempel givet ved

$$\{\mathbb{R}, 0.4x, 0.4x + 0.6\},$$

som har fraktal dimension $D = \ln(1/2)/\ln(0.4) \approx 0.7565$, eller

$$\{\mathbb{R}, 0.49x, 0.49x + 0.51\}$$

som har fraktal dimension 0.9717. Denne dimensions er næsten 1, og faktisk hvis vi tager

$$\{\mathbb{R}, 0.5x, 0.5x + 0.5\}$$

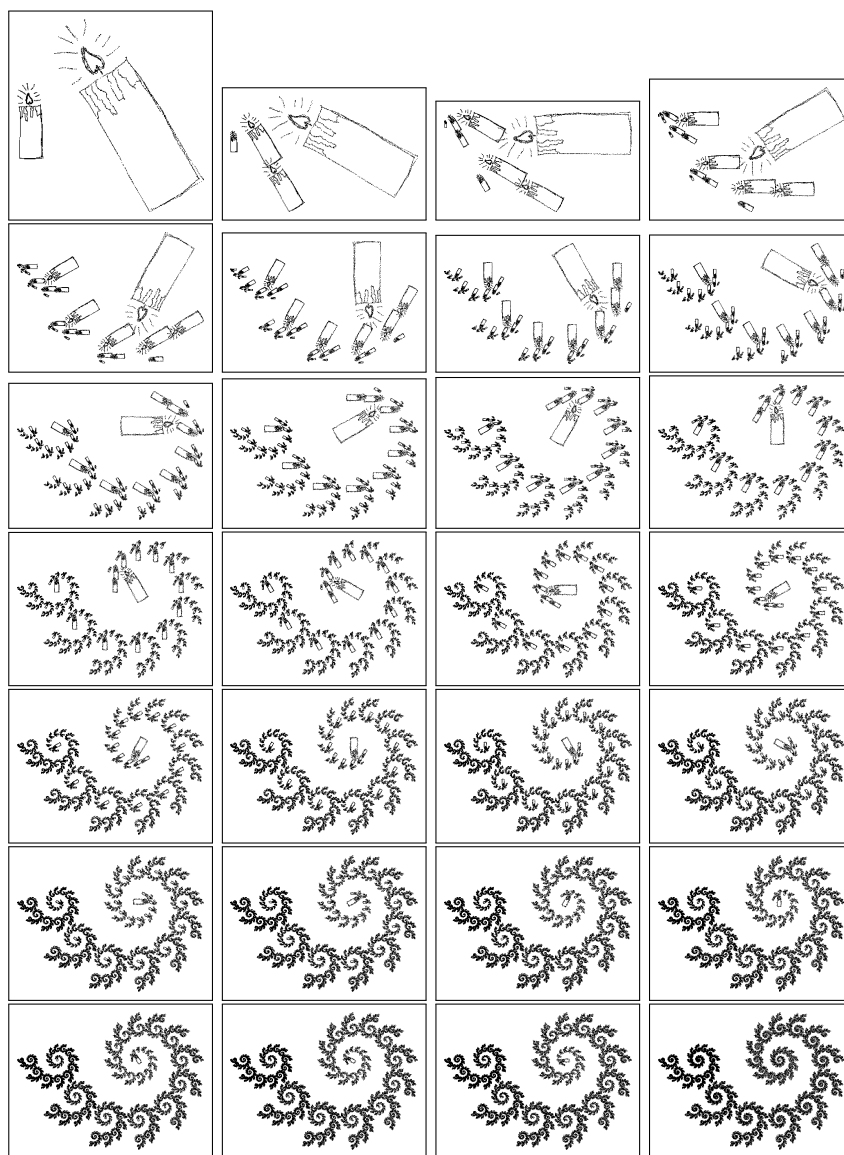
bliver attraktoren hele $[0, 1]$, og dens dimension er lig med

$$\ln(1/2)/\ln(0.5) = 1.$$

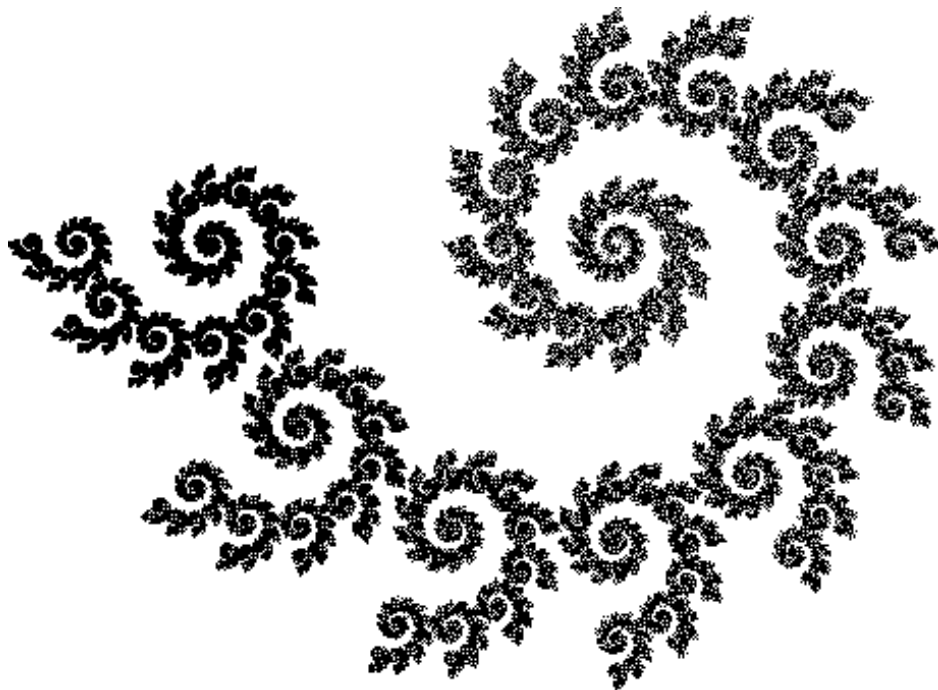
□

Litteratur

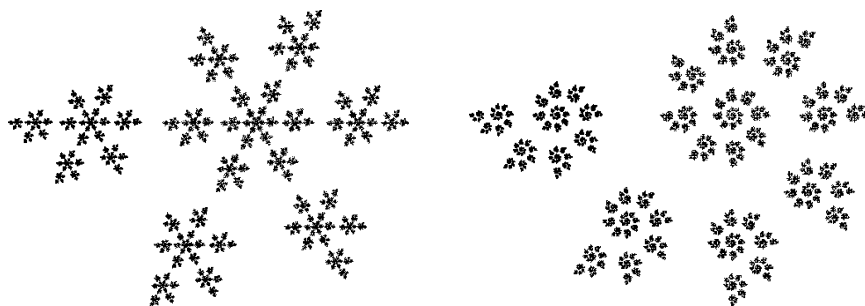
- [1] Michael F. Barnsley, “Fractals Everywhere”, second edition, Iterated Systems, Inc. Atlanta, Georgia, pp. 5-91 og 171-188, (1993).
- [2] Christian Berg, “Metriske rum”, Matematisk afdeling, Universitetsparken 5, 2100 København NV, pp. 64-65, 80-81, (1997)
- [3] Hutchinson, J., “Fractals and Self-similarity”, *Indiana University Journal of Mathematics* 30: 713 - 747 (1981)



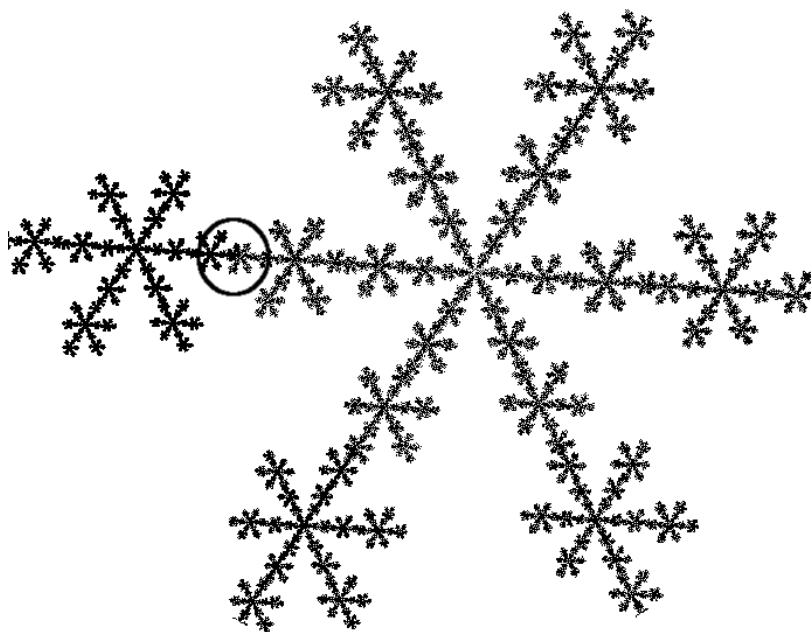
Figur 6: Et lys i $\mathbb{R}^2$ konvergerer mod spiralen S_1 .



Figur 7: En større udgave af spiralen i figur 6, hvor det godt ses at spiralen til venstre er disjunkt med resten af spiralen (hvilket faktisk medfører at den er totalt diskonnektet).



Figur 8: Vi sætter $c = 0.85$ i IFS'et ovenfor, så de to similituder har skalingskonstanter 0.85 og $1/3$. De er begge totalt diskonnektet så deres fraktal dimension er løsnigen af $0.85^D + (1/3)^D = 1$ og vurderes til ca. 1.4314 . Vi har sat vinklen θ til $\pi/3$ og $\pi/4$, henholdsvis, men dette gør ingen forskel på dimensionen.



Figur 9: En attraktor af et overlappende IFS, der fås ved at sætte $\theta = \pi/3$ og $c = 0.9$. Cirklen viser "overlapsområdet" for $w_1(A)$ og $w_2(A)$, men andre slike områder findes for $w_1(w_1(A))$ og $w_1(w_2(A))$, $w_2(w_1(A))$ og $w_2(w_2(A))$, og så videre. Her giver løsningen til $0.9^D + (1/3)^D = 1$, dvs. $D \approx 1.6637$ kun en øvre grænse for dimensionen.